系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
26(5) (2006, 10), 522–532

整数距离图 $G(D_{m,k,2})$ 的点线性荫度

左 连 翠

(南开大学组合数学中心， 天津 300071)

吴 建 良

(山东大学数学与系统科学院， 济南 250100)

刘 家 壮

(山东大学数学与系统科学院， 济南 250100)

摘要 整数距离图 $G(D)$ 以全体整数作为顶点集，顶点 u, v 相邻当且仅当 $|u-v| \in D$，其中 D 是一个正整数集. 本文讨论整数距离图的点线性荫度，记为 $vla(G(D))$. 对于 $m \geq 5k$，设 $D_{m,k,2} = \{1, 2, \cdots, m\} \backslash \{k, 2k\}$，得到

$$vla(G(D_{m,1,2})) = \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil + 1,$$

$$\left\lceil \frac{m+1}{5} \right\rceil + 1 \leq vla(G(D_{m,2,2})) \leq \begin{cases} 2\left\lceil \dfrac{m}{10} \right\rceil, & \text{若 } m = 10l+1, \\ 2\left\lceil \dfrac{m}{10} \right\rceil + 1, & \text{若 } m = 10l+j, \quad 2 \leq j \leq 4, \\ 2\left(\left\lceil \dfrac{m}{10} \right\rceil + 1\right), & \text{其他}. \end{cases}$$

并决定出了 $G(D_{m,2,2})$ 在某些特殊的 m 值上点线性荫度的确切值以及当 $k \geq 3$ 时 $G(D_{m,k,2})$ 的点线性荫度的上、下界.

关键词 整数距离图，点线性荫度，路着色.

MR(2000) 主题分类号 05C70

1 引 言

本文中，R, Z 分别表示全体实数集和全体整数集. 对于 $x \in R$, $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数，$\lceil x \rceil$ 表示不小于 x 的最小整数. 对于有限集 S, $|S|$ 表示 S 中所含元素的个数. 若 H 是图 G 的一个子图，则 G 称为 H 的一个母图，记为 $H \subseteq G$.

一个图 G 的一个 k- 着色是从 $V(G)$ 到 $\{1, 2, \cdots, k\}$ 的一个映射. 对于图 G 的一个给定的 k- 着色，V_i 表示 G 中染 i 色的所有顶点. 若 $V_i (1 \leq i \leq k)$ 都是独立集，则称 f 是一个正常 k- 着色，使得图 G 有正常 k- 着色的最小正整数 k 称为 G 的点色数，记为 $\chi(G)$. 若 $V_i (1 \leq i \leq k)$ 的导出子图中每个连通分支都是路，则称 f 是一个路 k- 着色. 使得图 G 有路 k- 着色的最小正整数 k 称为 G 的点线性荫度，记为 $vla(G)$. 近年来，点染色已经广泛应用于

收稿日期：2004-5-12, 收到修改稿日期：2005-07-13.

许多领域 (如 $L(2,1)$ 标号用于无线电频率分配问题，圆染色用于交通信号灯的控制等), 作为点染色的推广 — 点线性荫度理论，由于其在生命科学，特别是生物链中有着广泛的应用，越来越受到人们的重视．Matsumoto 在 [1] 中证明了：对于有限图 G, $vla(G) \le \lceil\frac{\Delta(G)+1}{2}\rceil$, 进而，若 $\Delta(G)$ 为偶数，则 $vla(G) = \lceil\frac{\Delta(G)+1}{2}\rceil$ 当且仅当 G 为 $\Delta(G)+1$ 阶的完全图或为一个圈；Goddard[2] 和 Poh[3] 证明了对于平面图 G, 有 $vla(G) \le 3$; Akiyama[4] 证明了对于外平面图 G, 有 $vla(G) \le 2$.

给定任一正实数集 D, 令 $G(R,D)$ 表示实数轴上的所有点作为点集合，而两个点 x,y 相邻当且仅当 $|x-y| \in D$ 的图，称为距离图，而 D 称为距离集．当 D 为一个正整数子集时，整数点集 Z 在 $G(R,D)$ 中的点导出子图称为整数距离图，记为 $G(D)$. 整数距离图首先是由 Eggleton 等人 [5] 引入的，由于任何一个有限图都同构于某个整数距离图的某个点导出子图 (见 [6]), 从而它在图论中有着更广泛的含义．后来又有许多人讨论了整数距离图．[5,7-13] 中讨论了各种整数距离图的点色数．令 $D_{m,k,s} = \{1,2,\cdots,m\}\backslash\{k,2k,\cdots,sk\}$, 其中 k,s 为正整数，$m \ge (s+1)k$, [7,12] 中讨论了整数距离图 $G(D_{m,k,s})$ 的点色数．[14] 中讨论了当 D 是 1 到 δ 的区间时距离图 $G(R,D)$ 的点线性荫度，并得出了一般整数距离图 $G(D)$ 的点线性荫度的几个上界；[15] 中讨论了 $s=1$ 时的整数距离图 $G(D_{m,k,1})$ 的点线性荫度，得出了：当 $m \ge 3$ 时，有 $vla(G(D_{m,1,1})) = \lceil\frac{m}{4}\rceil+1$；当 $m \ge 4$ 时，有 $\lceil\frac{m+1}{4}\rceil+1 \le vla(G(D_{m,1,1})) \le \lceil\frac{m}{4}\rceil+2$. 但当 $s>1$ 时，情况就复杂了．本文讨论 $s=2$ 的情况，得出对于所有 $m \ge 4$, 有 $vla(G(D_{m,1,2})) = \lceil\frac{m}{5}\rceil+1$; 对于所有的 $m \ge 8$, 有

$$\left\lceil\frac{m+1}{5}\right\rceil + 1 \le vla(G(D_{m,2,2})) \le \begin{cases} 2\left\lceil\dfrac{m}{10}\right\rceil, & \text{若 } m = 10l+1, \\ 2\left\lceil\dfrac{m}{10}\right\rceil + 1, & \text{若 } m = 10l+j, 2 \le j \le 4, \\ 2\left(\left\lceil\dfrac{m}{10}\right\rceil + 1\right), & \text{其它.} \end{cases}$$

并给出了 $G(D_{m,2,2})$ 在某些特殊的 m 值上点线性荫度的确切值; 当 $k \ge 3$ 时，得出了 $G(D_{m,k,2})$ 的点线性荫度的上、下界.

2　主要结论

先考虑 $k=1$ 的情况．显然当 $m=3$ 时，有 $D_{3,1,2} = \{3\}$, $vla(G(D_{3,1,2})) = 1$. 当 $4 \le m \le 5$ 时，若 $n = 10l+j$ 且 $0 \le j < 5$, 令 $f(n) = 0$; 若 $n = 10l+j$ 且 $5 \le j < 10$, 令 $f(n) = 1$. 则 f 是一个路染色，从而有 $vla(G(D_{m,1,2})) \le 2$, 又此时 $G(D_{m,1,2})$ 中有圈 $0,3,6,9,12,8,4,0$, 所以有 $vla(G(D_{m,1,2})) = 2$. 以下假设 $m > 5$.

定理 2.1　对于所有的正整数 $m \ge 6$, 有 $vla(G(D_{m,1,2})) = \lceil\frac{m}{5}\rceil + 1$.

证　首先给出 $G(D_{m,1,2})$ 的一个路着色：当 $n = 5i+j$, $0 \le j \le 4$, $0 \le i \le \lceil\frac{m}{5}\rceil$ 时，令 $f(n) = i$; 其余的点都周期地进行着色，即对于任意的整数 t, 令 $f(5t(\lceil\frac{m}{5}\rceil+1)+n) = f(n)$, 则 f 为一个路着色，从而有 $vla(G(D_{m,1,2})) \le \lceil\frac{m}{5}\rceil + 1$.

下面证明 $vla(G(D_{m,1,2})) \ge \lceil\frac{m}{5}\rceil + 1$. 用反证法．假若结论不成立，则 $vla(G(D_{m,1,2})) \le \lceil\frac{m}{5}\rceil = q$, 那么 $G(D_{m,1,2})$ 有一个 q- 着色 f. 显然 f 也是 $G(D_{m,1,2})$ 中由顶点 $0,1,2,\cdots,5q$ 导出的子图 H 的 q- 着色．注意到 $|V(H)| = 5q+1$, 则 H 中至少有六个点 $(0 \le)a_0 < a_1 < \cdots < a_5(\le 5q)$ 着同色 α.

断言 1 若 $a_4-a_0\le m$, 则 $a_4=a_3+1=a_2+2=a_1+3=a_0+4$.

否则, 有 $0\le i\le 3$, 使得 $a_{i+1}-a_i>1$, 则 $a_0a_4,a_0a_3,a_0a_2\in E(H)$, 或者 $a_0a_4,a_1a_4,a_2a_4\in E(H)$, 即 a_0,a_2,a_3,a_4 形成一个 $K_{1,3}$, 或者 a_0,a_1,a_2,a_4 形成一个 $K_{1,3}$, 矛盾. 从而断言 1 成立.

断言 2 $\min\{a_4-a_0,a_5-a_1\}>m$.

假设 $a_4-a_0\le m$, 则由断言 1 得知 $a_4=a_3+1=a_2+2=a_1+3=a_0+4$, 从而 $a_0a_3,a_0a_4,a_1a_4\in E(H)$, 故 $a_0a_5,a_4a_5\notin E(H)$. 那么必有 $a_5-a_0>m$, 且 $a_5-a_4=t\le 2$ 或 $a_5-a_4>m$. 若 $a_5-a_4=t\le 2$, 则 a_0,a_1,a_2 都与 a_5 相邻，矛盾. 从而只有 $a_5-a_4>m$, 那么 $a_5\ge m+1+a_4\ge m+5>5q$, 矛盾.

所以有 $a_4-a_0>m$. 同理 $a_5-a_1>m$. 故断言 2 成立.

断言 3 $m=5(q-1)+1$.

假设 $m\ge 5(q-1)+2\ge 7$. 由断言 2, 有 $a_4-a_0>m$, $a_5-a_1>m$. 设存在 $1\le h<4$, 使得 $a_h-a_0\le m$, 但 $a_{h+1}-a_0>m$. 若 $h=1$, 则 $a_2-a_0>m$, $a_5-a_2\le 5q-(m+1)\le 2$, 与 $a_5-a_2\ge 3$ 矛盾，从而 $h\ge 2$, 即 $h=2$ 或 3.

情况 1 $h=2$.

此时 $a_3-a_0>m$, $a_5-a_3\le 5q-(m+1)\le 2$, 这样就有 $a_5-a_3=2$, 即 $a_5=a_4+1=a_3+2=5q$, $a_3=m+1$, $m=5(q-1)+2$, $a_4=m+2$. 但 $a_5-a_1>m$, 所以 $a_1\le a_5-(m+1)\le 2$, $a_0\le 1$. (1) 当 $a_0=1$ 时，有 $a_1=2$. 此时有 $a_0a_3,a_1a_3,a_1a_4\in E(H)$, 从而 $a_1a_2,a_2a_3\notin E(H)$, 即 $a_2-a_1\le 2$, $a_3-a_2\le 2$. 但 $a_3-a_1=m-1$, 故有 $m-1\le 4$, 即 $m\le 5$, 矛盾. (2) 下设 $a_0=0$. 若 $a_1=2$, 则 $a_1a_3,a_1a_4\in E(H)$, 那么 $a_1a_2\notin E(H)$, 即 $a_2-a_1\le 2$. 此时必有 $a_2a_3,a_2a_4\in E(H)$, 即 a_1,a_2,a_3,a_4 形成一个 4- 圈，矛盾. 故只有 $a_1=1$, 从而 $a_1a_3\in E(H)$. 那么有 $a_2a_3\notin E(H)$ 或 $a_1a_2\notin E(H)$, 即 $a_3-a_2\le 2$ 或 $a_2-a_1\le 2$. 在前一情况下，有 $m-1\le a_2\le m$, 所以有 $a_1a_2,a_0a_2,a_2a_5\in E(H)$, 即 a_0,a_1,a_2,a_5 构成一个 $K_{1,3}$, 矛盾. 在后一情况下，有 $2\le a_2\le 3$, 则 $a_2a_3,a_2a_4\in E(H)$, 并且有 $a_0a_2\in E(H)$(此时 $a_2=3$) 从而推出矛盾，或者 $a_2=2$, $a_1a_3\in E(H)$, 此时 H 中剩下的 $5(q-1)$ 点 $3,4,\cdots,m$ 恰染 $q-1$ 种色，由断言 1 每色恰染形为 $u(\ge 3),u+1,u+2,u+3,u+4$ 的五个点，从而 $m+4$ 只能染 α 色，但它与 a_3 相邻，那么与 a_1,a_2,a_3 构成一个 $K_{1,3}$, 矛盾.

情况 2 $h=3$.

即有 $a_3-a_0\le m$, $a_4-a_0>m$, 从而 $a_0a_3\in E(H)$. 故 $a_3a_4\notin E(H)$ 或者 $a_3a_5\notin E(H)$, 又因为 $a_3\ge 3$, $a_5-a_3\le m$, 所以必有 $a_3a_4\notin E(H)$, 即 $a_4-a_3\le 2$. 那么有 $m+1\le a_4-a_0\le m+2$.

(1) 若 $a_4-a_0=m+2$, 则 $a_0=0$, $a_4=m+2$, $a_5=m+3$, $m=5(q-1)+2$, $a_3\le m$. 又 $a_3\ge a_4-2=m$, 故 $a_3=m$, 所以 $a_3a_5\in E(H)$, 从而 $a_1a_3,a_2a_3\notin E(H)$, 即 $a_3-a_1=2$, $a_3=a_2+1=a_1+2$, 亦即 $a_1=m-2$, $a_2=m-1$, 则 $a_0a_1,a_0a_2,a_0a_3\in E(H)$, 矛盾.

(2) 若 $a_4-a_0=m+1$, 则 $a_0=0$ 或 1. (2.1) 当 $a_0=0$ 时， $a_4=m+1$, $a_3\ge m-1$, 若 $a_3a_5\notin E(H)$, 则 $a_3=m$, $a_5=m+2$, 且 $a_2a_5\in E(H)$. 又由 $a_0a_3\in E(H)$ 可知 $a_1a_3\notin E(H)$ 或 $a_2a_3\notin E(H)$, 从而必有 $a_2a_3\notin E(H)$, 即 $a_3-a_2\le 2$, $a_2\ge a_3-2=m-2$, 故 $a_0a_2\in E(H)$. 所以 $a_0a_1\notin E(H)$, 即 $a_1-a_0\le 2$, 从而 a_1a_2, $a_1a_3,a_1a_4\in E(H)$, 矛盾. (2.2) 当 $a_0=1$ 时， $a_4=m+2$, $a_5=m+3$, $m=5(q-1)+2$, $a_3\ge m$. 但 $a_3-a_0\le m$, 故 $a_3=m$ 或 $m+1$. 因为 $a_0a_3\in E(H)$, 所以 $a_0a_1\notin E(H)$ 或 $a_0a_2\notin E(H)$. 又 $a_5-a_1>m$, 故有 $a_1\le 2$, 从而 $a_1=2$, $a_1a_3\in E(H)$. 那么 $a_2a_3\notin E(H)$, 即 $a_3-a_2\le 2$, 亦即 $m\ge a_2\ge a_3-2\ge m-2$, 从

而有 $a_2a_5, a_0a_2 \in E(H)$, 且由于 $m \geq 5(q-1)+2 \geq 7$, $a_2 \geq m-2 \geq 5$, 故有 $a_1a_2 \in E(H)$, a_0, a_1, a_2, a_5 形成一个 $K_{1,3}$, 矛盾.

所以必有 $m = 5(q-1)+1$, 即断言 3 成立.

断言 4 $a_2 \leq 2$ 且 $a_4 \geq 5(q-1)+4$, 即 $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_4 = 5q-1$, $a_5 = 5q$.

我们证明 $a_2 \leq 2$.

首先证明 $a_2 - a_0 = 2$. 假若 $a_2 - a_0 \geq 3$, 下证 $a_0a_2 \in E(H)$, 即 $a_2 - a_0 \leq m$. 否则 $a_2 - a_0 \geq m+1$, 则 $a_0 = 0$, $a_2 = m+1$, $a_3 = m+2$, $a_4 = m+3$, $a_5 = m+4$, $a_2a_5 \in E(H)$. 若 $1 \leq a_1 \leq m-2$, 则 $a_1a_2 \in E(H)$, H 中剩余的顶点 $1, \cdots, a_1-1, a_1+1, \cdots, m$ 染 $q-1$ 种色，每色恰染形为 $u(\geq 1)$, $u+1$, $u+2$, $u+3$, $u+4$ 的五个点. 从而 $m+5$ 只能染 α 色，但 $m+5$ 与 a_2 相邻，从而与 a_1, a_2, a_5 构成一个 $K_{1,3}$, 矛盾. 若 $m-1 \leq a_1 \leq m$, 则 $a_0a_1 \in E(H)$, H 中剩余的顶点 $1, \cdots, a_1-1, a_1+1, \cdots, m$ 染 $q-1$ 种色，每色恰染形为 $u(\geq 1)$, $u+1$, $u+2$, $u+3, u+4$ 的五个点. 从而 $m+5$ 只能染 α 色，但 $m+5$ 与 a_1, a_2, a_3 都相邻，矛盾. 故只有 $a_2 - a_0 \leq m$, 从而 $a_0a_2 \in E(H)$. 那么 a_2 至多与 a_1, a_3, a_4, a_5 中的一个相邻.

(1) 若 $a_1a_2 \in E(H)$, 则 $a_2 - a_1 \geq 3, a_2 \geq 4$ 且 $a_2a_3, a_2a_4, a_2a_5 \notin E(H)$, 从而 $a_4 - a_2 = 2$, $a_5 - a_2 \geq m+1$, 那么 $a_5 \geq a_2 + m + 1 \geq m+5$, 矛盾.

(2) 若 $a_2a_3 \in E(H)$, 则 $a_3 - a_2 > 3$ 且 $a_2a_4, a_2a_5 \notin E(H)$, 从而 $a_4 - a_2 \geq m+1$, 但 $a_2 \geq 3$, 故 $a_4 \geq m+4$, 而这是不可能的.

(3) 设 $a_2a_4 \in E(H)$, 则 $a_5 - a_2 \geq m+1$, $a_2 = 3$, $a_5 = m+4$, $a_4 \geq 6$, $a_3 \leq 5$. 若 $a_3a_4 \notin E(H)$, 则 $a_4 \leq 7$, 但 $a_4 \geq m+1 \geq 7$, 故 $a_4 = 7$, $a_3 = 5$. 此时必有 $a_1a_3, a_1a_4 \in E(H)$, $m = 6$, $a_5 - a_4 = 3$, $a_4a_5 \in E(H)$. 那么 a_4 与 a_2, a_1, a_5 都相邻，从而构成一个 $K_{1,3}$, 矛盾. 若 $a_3a_4 \in E(H)$, 则 $a_1a_4, a_4a_5 \notin E(H)$, 从而 $a_4 - a_1 \geq m+1, a_4 \geq m+2$. 又 $a_3 - a_2 \leq 2$, 故 $a_3 \leq 5$, $a_0a_3 \in E(H)$, 那么 $a_1a_3 \notin E(H)$, 即 $a_3 - a_1 = 2$, 从而 $a_1 = 2, a_3 = 4, a_3a_5 \in E(H)$, 故 a_0, a_3, a_4, a_5 导出一个 $K_{1,3}$, 矛盾.

(4) 若 $a_2a_5 \in E(H)$, 则 $a_4 - a_2 = 2$, 且 $a_2 - a_1 \leq 2$. 由于 $a_4 - a_0 \geq m+1$, 所以 $a_2 - a_0 = a_4 - a_0 - (a_4 - a_2) \geq m-1$. 又因为 $a_2 - a_0 \leq m$, 所以 $a_2 - a_0 = m-1$ 或 m, $a_1 - a_0 \geq a_2 - a_0 - 2 \geq m-3$. 又 $a_5 - a_1 \geq m+1$, 故 $a_1 \leq 3$. 从而 $m = 6$, $a_1 = 3$, $a_5 = 10$, $a_2 - a_0 \geq 5$. 又 $a_2 - a_1 \leq 2$, 故 $a_2 = 5$, $a_0 = 0$, $a_3 = 6$, 那么 $a_0a_1, a_0a_2, a_0a_3 \in E(H)$, 矛盾.

(5) 若 a_2 与 a_1, a_3, a_4, a_5 都不相邻，则 $a_2 - a_1 \leq 2, a_4 - a_2 = 2, a_5 - a_2 \geq m+1$, 那么 $a_5 = m+4, a_2 = 3, a_0 = 0, a_4 = 5$, 这与 $a_4 \geq m+1$ 相矛盾.

故必有 $a_2 - a_0 \leq 2$, 即 $a_2 - a_0 = 2$.

再证 $a_0 = 0$. 否则，若 $a_0 \geq 1$, $a_1 \geq 2$, 则由于 $a_5 - a_1 > m$, $a_1 \leq 3$. 当 $a_1 = 3$ 时， $a_2 = 4$, $a_0 = 2$, $a_5 = m+4$, $a_4 = m+3$, 那么 $a_0a_3, a_1a_4, a_2a_4, a_2a_5 \in E(H)$, 故 $a_3a_4, a_2a_3 \notin E(H)$, 即 $a_3 - a_2 \leq 2$, $a_4 - a_3 \leq 2$, 那么 $a_4 - a_2 \leq 4$, 但 $a_4 - a_2 = m-1 > 4$, 矛盾. 从而只有 $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_0 = 1$, $a_4 \geq m+2$, $a_2a_4 \in E(H)$, 故有 $a_2a_3 \notin E(H)$ 或者 $a_3a_4 \notin E(H)$. 若为前者，则 $a_3 - a_2 \leq 2$, 即 $4 \leq a_3 \leq 5$, 那么 $a_0a_3, a_3a_4, a_3a_5 \in E(H)$, 矛盾. 若为后者，则 $a_4 - a_3 \leq 2$, 即 $m \leq a_3 \leq m+2$, 那么 $a_1a_3, a_2a_3 \in E(H)$, 从而 $a_0a_3, a_3a_4, a_3a_5 \notin E(H)$. 故有 $a_3 = m+2$, $a_4 = m+3$, $a_5 = m+4$, $a_2a_4 \in E(H)$. 此时 H 中剩下的 $5(q-1)$ 个点 $0, 4, 5, \cdots, m+1 = 5(q-1)+2$ 染 $q-1$ 种色，每色恰染五个点. 若 $0 < h_1 < h_2 < h_3 < m+1$ 染色 β, 则 h_1 与 $m+1$ 相邻，且其余每色恰染形为 $u(\geq 4)$, $u+1$, $u+2$, $u+3$, $u+4$ 的五个

点, 从而 $m+6, m+7$ 必染 β 色, 但它们与 $h_1, m+1$ 形成一个 $K_{1,3}$, 矛盾. 如果 0 与 $m+1$ 不同色, 则上面的 $5(q-1)$ 个点中每色恰染连续的五个点, 而这是不可能的. 从而必有 $a_0=0$. 进而有 $a_1=1$, $a_2=2$.

此时若 $a_4\le m+2$, 则 $a_2a_4\in E(H)$, 故有 $a_2a_3\notin E(H)$ 或 $a_3a_4\notin E(H)$. 若为前者, 则 $a_3-a_2\le 2$, 所以有 a_0a_3, $a_3a_4\in E(H)$, 那么 a_1a_4, $a_3a_5\notin E(H)$, 即 $a_5=m+4$, $a_3=3$, $a_4=m+2$. H 中剩余的 $5(q-1)$ 个点 $4,5,\cdots,m+1,m+3$ 染 $q-1$ 种色, 由断言 1 知每色恰染连续的五个点, 而这是不可能的. 若为后者, 则 $a_4-a_3\le 2$, 而 $m+1\le a_4\le m+2$, 故 $m-1\le a_3\le m+1$. 若 $a_3\le m$, 则 a_3 与 a_0, a_1, a_2 都相邻, 矛盾. 故 $a_3=m+1$, 从而 a_1a_3, $a_2a_3\in E(H)$. 那么 a_3a_4, $a_3a_5\notin E(H)$, 即 $a_4=m+2$, $a_5=m+3$. H 中剩下的 $5(q-1)$ 个点 $3,4,\cdots,m,m+4$ 染 $q-1$ 种色, 每色恰染五个点, 且除 $3<h_1<h_2<h_3<m+4$ 染色 β 外, 其余每色恰染五个连续点. 显然 h_1,h_2,h_3 都与 $m+4$ 相邻 (因为 $4\le h_1<h_2<h_3\le m$), 矛盾. 从而必有 $a_4=m+3$, $a_5=m+4$.

故断言 4 成立.

断言 5 $a_3=3$ 或 $a_3=m+2$.

假若 $3<a_3<m+2$, 则 $a_3a_5\in E(H)$, 那么 $a_2a_3\notin E(H)$ 或 $a_3a_4\notin E(H)$. 若为前者, 即 $a_3-a_2\le 2$, 则 $a_3a_4, a_0a_3\in E(H)$, 故 a_0, a_3, a_4, a_5 构成一个 $K_{1,3}$, 矛盾. 若为后者, 即 $a_4-a_3\le 2$, 则 $a_3\ge m+1$, 那么有 $a_3=m+1$, 从而 $a_1a_3, a_2a_3\in E(H)$, 故 a_1,a_2,a_3,a_5 导出一个 $K_{1,3}$, 矛盾. 所以断言 5 成立.

不妨设 $a_3=3$, 则 H 中剩下的 $5(q-1)$ 个点 $4,\cdots,m+2$ 共染 $q-1$ 种色, 每色恰染连续的五个点, 那么 $m+7$, $m+8$ 只能染 α 色, 但它们与 a_4, a_5 构成一个 4- 圈, 矛盾.

综上所述, 我们证明了 $vla(G(D_{m,1,2}))\ge\lceil\frac{m}{5}\rceil+1$.

从而有 $vla(G(D_{m,1,2}))=\lceil\frac{m}{5}\rceil+1$. 证毕.

下面讨论由 $D_{m,2,2}=\{1,2,\cdots,m\}\backslash\{2,4\}$ 决定的整数距离图 $G(D_{m,2,2})$ 的点线性荫度. 显然当 $m\le 7$ 时, $D_{m,2,2}$ 中 2 的倍数不超过一个. 此时, 若偶数点染 0 色, 奇数点染 1 色, 则得到 $G(D_{m,2,2})$ 的一个路染色; 又此时图中含圈, 故有 $vla(D_{m,2,2})=2$. 以下设 $m\ge 8$, 有下面的结论.

定理 2.2 对于任意的 $m\ge 8$, 有

$$\left\lceil\frac{m+1}{5}\right\rceil+1\le vla(G(D_{m,2,2}))\le\begin{cases}2\left\lceil\dfrac{m}{10}\right\rceil, & 若\ m=10l+1,\\ 2\left\lceil\dfrac{m}{10}\right\rceil+1, & 若\ m=10l+j,\quad 2\le j\le 4,\\ 2\Big(\left\lceil\dfrac{m}{10}\right\rceil+1\Big), & 其它.\end{cases}$$

证 先证下界, 即证 $vla(G(D_{m,2,2}))\ge\lceil\frac{m+1}{5}\rceil+1$. 首先证明当 $m=5q$, $q\ge 2$ 时, 结论成立.

用反证法. 假若 $vla(G(D_{m,2,2}))\le\lceil\frac{m+1}{5}\rceil=q+1=n$, 则 $G(D_{m,2,2})$ 有路 n- 着色. 那么由顶点集 $0,1,2,\cdots,5n$ 导出的子图 H 也有 n- 着色, 但 $V(H)=5n+1$, 故 H 中至少有六个点, 设为 $(0\le)a_0<a_1<a_2<a_3<a_4<a_5\le m+5$, 染同色 α.

断言 1 $\min\{a_4-a_0, a_5-a_1\}>m$.

否则, 假设 $a_4-a_0\le m$, 下证 $a_4=a_3+2=a_2+4=a_1+6=a_0+8$. 若 $a_1-a_0\ne 2$, 则或者 $a_0a_1\in E(H)$ 或者 $a_1-a_0=4$. (1) 若 $a_0a_1\in E(H)$, 则 a_0 至多与 a_2, a_3,a_4 中一个相

邻. 当 $a_0a_2 \in E(H)$ 时， $a_4 - a_0 = 4$, $a_3 - a_0 = 2$, 矛盾. 当 $a_0a_3 \in E(H)$ 时， $a_2 - a_0 = 2$, $a_4 - a_0 = 4$, 即 $a_4 = a_3 + 1 = a_2 + 2 = a_1 + 3 = a_0 + 4$, 故有 $a_0a_1, a_1a_2, a_1a_4 \in E(H)$, 从而 a_0, a_1, a_2, a_4 构成一个 $K_{1,3}$, 矛盾. 当 $a_0a_4 \in E(H)$ 时， $a_2 - a_0 = 2$, $a_3 - a_0 = 4$, 那么 $a_0a_1, a_1a_2, a_1a_3 \in E(H)$, 矛盾. (2) 若 $a_1 - a_0 = 4$, 则 $a_0a_2, a_0a_3, a_0a_4 \in E(H)$, 亦推出矛盾. 从而必有 $a_1 - a_0 = 2$. 同理可证 $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = 2$.

那么 $a_0a_3, a_0a_4, a_1a_4 \in E(H)$, 故有 $a_4a_5 \notin E(H)$, 即 $a_5 - a_4 \in \{2, 4\}$, 从而 $a_0a_5 \in E(H)$ 或者 $a_1a_5, a_3a_5 \in E(H)$, 亦即 a_0, a_3, a_4, a_5 导出一个 $K_{1,3}$, 或者 a_0, a_3, a_5, a_1, a_4 导出一个 5-圈，都推出矛盾.

从而必有 $a_4 - a_0 > m$.

同理 $a_5 - a_1 > m$. 故断言 1 成立.

由断言 1 可得：在 $G(D_{m,2,2})$ 的路着色中，若 $u, u+2, u+4, u+6, u+8$ 染色 β, 则所有满足 $\min\{|v-u|, |v-(u+8)|\} \leq m$ 的那些点 v 都不能染 β 色. 下面根据 a_i $(0 \leq i \leq 5)$ 的相对位置分情况推出矛盾.

情况 1　$a_2 - a_0 = 2$.

此时有 $a_0a_1, a_1a_2 \in E(H)$, 故 $a_1a_3 \notin E(H)$, 即 $a_3 - a_1 = 2$ 或 4, 或 $a_3 - a_1 > m$. (1) 设 $a_3 - a_1 = 2$ 或 4, 则 $a_0a_3, a_2a_3 \in E(H)$, 那么 a_0, a_1, a_2, a_3 构成一个 4- 圈，矛盾. (2) 设 $a_3 - a_1 \geq m+1$, 则 $a_3 \geq m+2$, 但是 $a_3 \leq m+3$, 故 $a_3 = m+2$ 或 $m+3$. (2.1) 若 $a_3 = m+2$, 则 $a_1 = 1$, $a_0 = 0$, $a_2 = 2$, 所以 $a_2a_3 \in E(H)$, 故 a_4, a_5 中至多有一个与 a_3 相邻，那么 $a_4 = m+4$ 或 $a_5 = m+4$. 若为前者，则 $a_5 = m+5$ 且 $a_3a_5 \in E(H)$. 此时 H 中剩下的 $5q$ 个点 $3, 4, \cdots, m+1, m+3$ 染 q 种色，每色恰染形为 $u(\geq 3)$, $u+2$, $u+4$, $u+6$, $u+8$ 的五个点，那么 $m+8$ 必染 α 色. 但它与 a_3, a_5 都相邻，从而 a_3, a_5, $m+8$ 形成一个 3- 圈，矛盾. 若为后者，则 $a_4 = m+3$, $a_5 = m+4$, H 中剩下的 $5q$ 个点 $3, 4, \cdots, m+1, m+5$ 染 q 种色，每色恰染五个点，那么 $m+5$ 必和 3 或 4 同色 (否则每色必染形为 $u(\geq 3)$, $u+2$, $u+4$, $u+6$, $u+8$ 的五个点，但与 $m+5$ 同色的这种类型的五个点不存在). 不妨设 $3 < g_1 < g_2 < g_3 < m+5$ 染同色 β, 则其余的每色恰染形为 $u(\geq 4)$, $u+2$, $u+4$, $u+6$, $u+8$ 的五个点. 那么 $m+6, m+7, m+8$ 必染 β 色，但它们与 $m+5$ 形成一个 4- 圈，矛盾. (2.2) 若 $a_3 = m+3$, 则 $a_4 = m+4$, $a_5 = m+5$, $a_1 = 1$ 或 2, 无论哪种情况与上同理都可推出矛盾.

情况 2　$a_2 - a_0 = 3$.

此时有 $a_0a_2 \in E(H)$, 且 $a_0a_1 \in E(H)$ 或 $a_1a_2 \in E(H)$.

(1) 设 $a_0a_1 \in E(H)$, 则 $a_2 - a_1 = 2$, 那么 a_3, a_4, a_5 都不能与 a_0 相邻，故 $a_3 - a_0 = 4$ 或 $a_3 - a_0 \geq m+1$. 若 $a_3 - a_0 = 4$, 则 $a_1a_3, a_2a_3 \in E(H)$, 故 a_0, a_1, a_2, a_3 形成一个 4- 圈，矛盾. 若 $a_3 - a_0 \geq m+1$, 则必有 $a_3 - a_1 > m$ (否则， $a_3 - a_1 \leq m$, 则 $a_1a_3, a_2a_3 \in E(H)$, 仍有 a_0, a_1, a_2, a_3 形成一个 4- 圈，矛盾), 即 $a_3 \geq m+2$, 又 $a_3 \leq m+3$, 故 $a_3 = m+2$ 或 $m+3$. 此时有 $a_3 - a_1 = m+1$ 或 $m+2$. (1.1) 设 $a_3 - a_1 = m+1$, 则 $a_2a_3, a_0a_2 \in E(H)$, 从而 $a_2a_4 \notin E(H)$, 故有 $a_2 = 3$, $a_4 = m+4$, $a_5 = m+5$, $a_1 = 1$, $a_0 = 0$, $a_3 = m+2$. 那么 H 中剩余的 $5q$ 个点 $2, 4, \cdots, m+1, m+3$ 染 q 种色，每色恰染五个点，且除一色 β 外，其余每种色恰染形为 $u(\geq 2)$, $u+2$, $u+4$, $u+6$, $u+8$ 的五个点，从而点 $m+6$, $m+7$, $m+8$, $m+9$ 必染 β 色，但它们形成一个 4- 圈，矛盾. (1.2) 设 $a_3 - a_1 = m+2$, 则 $a_3 = m+3$, $a_1 = 1$, $a_0 = 0$, $a_2 = 3$, $a_4 = m+4$, $a_5 = m+5$, H 中剩余的 $5q$ 个点 $2, 4, \cdots, m+2$ 染 q 种色，每色恰染形为 $u(\geq 2)$, $u+2$, $u+4$, $u+6$, $u+8$ 的点，那么 $m+6$ 必染 α 色，但它与 a_3 相邻，从

而 a_2, a_3, a_4 与 $m+6$ 形成一个 $K_{1,3}$, 矛盾.

(2) 设 $a_1a_2 \in E(H)$, 则 $a_1 - a_0 = 2$, a_2 与 a_3, a_4, a_5 都不相邻. 因为 $a_2 \geq 3$, $a_3 - a_2 \leq m$, 所以 $a_3 - a_2 = 2$ 或 4, 从而 $a_0a_3, a_1a_3 \in E(H)$, 故 a_0, a_2, a_1, a_3 形成一个 4- 圈, 矛盾.

情况 3 $a_2 - a_0 = 4$.

此时要么 $a_0a_1, a_1a_2 \in E(H)$, 要么 $a_0a_1, a_1a_2 \notin E(H)$.

(1) 设 $a_0a_1, a_1a_2 \in E(H)$, 则 $a_1 - a_0 = 1$ 或 3, 且 a_3, a_4, a_5 都与 a_1 不相邻, 那么 $a_3 - a_1 > m$ (否则, $a_3 - a_1 = 2$ 或 4, 则 $a_0a_3, a_2a_3 \in E(H)$, a_0, a_1, a_2, a_3 形成一个 4- 圈, 矛盾). 又 $a_3 \leq m+3$, 所以 $a_1 - a_0 = 1$, $a_3 - a_1 = m+1$ 或 $m+2$. (1.1) 设 $a_3 - a_1 = m+2$, 则 $a_1 = 1$, $a_3 = m+3$, $a_0 = 0$, $a_2 = 4$, $a_4 = m+4$, $a_5 = m+5$, 那么 $a_2a_4, a_2a_3 \in E(H)$, 故 a_1, a_2, a_3, a_4 构成一个 $K_{1,3}$, 矛盾. (1.2) 设 $a_3 - a_1 = m+1$, 则 $a_1 = 1$ 或 2. 当 $a_1 = 1$ 时, $a_0 = 0$, $a_2 = 4$, $a_3 = m+2$, $a_4 = m+3$ 或 $m+4$, 那么 a_1, a_2, a_3, a_4 构成一个 $K_{1,3}$, 矛盾. 当 $a_1 = 2$ 时, $a_0 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = m+3$, $a_4 = m+4$, $a_5 = m+5$, 那么 a_2 与 a_1, a_3, a_4, a_5 都相邻, 亦推出矛盾.

(2) 设 $a_0a_1, a_1a_2 \notin E(H)$, 即 $a_2 - a_1 = a_1 - a_0 = 2$. 下证 $a_3 - a_2 \notin \{2,4\}$. 否则, 假设 $a_3 - a_2 \in \{2,4\}$. 若 $a_3 - a_2 = 2$, 则由 $a_4 - a_0 \geq m+1$ 得 $a_4 - a_3 \geq m+1-6 \geq 5$, 所以 $a_0a_3, a_3a_4 \in E(H)$, 从而 $a_3a_5 \notin E(H)$, 即 $a_5 - a_3 \geq m+1$, $a_5 \geq a_3 + m + 1 \geq m+7$, 矛盾. 若 $a_3 - a_2 = 4$, 则 $a_0a_3 \in E(H)$ 且 $a_4 - a_3 \geq m+1-8 \geq 3$, 故有 $a_3a_4 \in E(H)$ 或 $a_4 - a_3 = 4$. 当 $a_3a_4 \in E(H)$ 时, 与上同理可得矛盾; 当 $a_4 - a_3 = 4$ 时, 有 $a_1a_3, a_3a_5 \in E(H)$, 故 a_0, a_3, a_1, a_5 构成一个 $K_{1,3}$, 矛盾. 所以必有 $a_3 - a_2 \neq 2$ 或 4, 即 $a_2a_3 \in E(H)$.

若 $a_2a_5 \in E(H)$, 则 $a_2a_4 \notin E(H)$, 即 $a_4 - a_2 = 2$ 或 4, 从而 $a_4 - a_0 \leq 8 < m$, 矛盾. 故必有 $a_2a_5 \notin E(H)$, 即 $a_5 - a_2 \geq m+1$, 从而 $a_2 = 4$, $a_5 = m+5$, $a_1 = 2$, $a_0 = 0$. 此时 $a_2a_4 \in E(H)$, 所以 $a_3a_4 \notin E(H)$, 即 $a_4 - a_3 = 2$ 或 4. 从而有 $a_3 \leq a_4 - 2 \leq m+2$.

此时必有 $a_1a_3 \in E(H)$, 那么 a_0, a_4, a_5 都与 a_3 不相邻, 所以有 $a_5 - a_4 = a_4 - a_3 = 2$ 且 $a_3 - a_0 \geq m+1$. 又因为 $a_5 \leq m+5$, 所以 $a_3 \leq m+1$, 故 $a_3 = m+1$, $a_4 = m+3$, $a_5 = m+5$, $a_1a_3, a_2a_3, a_2a_4 \in E(H)$. 此时 H 中剩余的 $5q$ 个点 $1, 3, 5, 6, \cdots, m, m+2, m+4$ 共染 q 种色, 每色恰染五个点. (2.1) 若 $1 < g_1 < g_2 < g_3 < m+2$ 染 β 色, 则 $3 < h_1 < h_2 < h_3 < m+4$ 染 γ 色 (否则, α, β 色之外的其余每一种颜色都染形为 $u(\geq 3), u+2, u+4, u+6, u+8$ 的五个点, 而与 $m+4$ 同色的这样的五个点是不存在的), 而其余每色恰染形为 $u(\geq 6), u+2, u+4, u+6, u+8$ 的五个点, 那么由 $g_1, h_1 \geq 5$ 可知 g_1, g_2, g_3 中至少有一点与 $m+2$ 相邻, h_1, h_2, h_3 中至少有两点与 $m+4$ 相邻. 所以 $m+7$, $m+9$ 都染 β 色, 但它们都与 $m+2$ 相邻, 从而同色点导出一个 $K_{1,3}$, 矛盾. (2.2) 若 $1 < l_1 < l_2 < l_3 < m+4$ 染同色 β, 则其余每色恰染形为 $u(\geq 3), u+2, u+4, u+6, u+8$ 的五个点, 那么 $m+7, m+9$, $m+10$ 中至少有一个染 α 色, 但其中任一点都与 a_1, a_2, a_3 导出一个 $K_{1,3}$, 矛盾. (2.3) 若 $3 < h_1 < h_2 < h_3 < m+4$ 染同色, 则由 (2.1) 知 1 与 $m+2$ 不同色, 那么由断言 1 的证明可知, 与 1 同色的五个点必定是 $1, 3, 5, 7, 9$, 矛盾. (2.4) 若 1 与 $m+2, m+4$ 不同色且 3 与 $m+4$ 不同色, 则每色恰染形为 $u(\geq 1), u+2, u+4, u+6, u+8$ 的五个点, 那么 $m+6$ 只能染 α 色, 但它与 a_1, a_2, a_3 导出一个 $K_{1,3}$, 也推出矛盾.

情况 4 $a_2 - a_0 \geq 5$.

(1) 当 $a_2 - a_0 \leq m$ 时, 有 $a_0a_2 \in E(H)$, 所以 a_3, a_4, a_5 中至多有一个与 a_2 相邻. (1.1) 当 a_3, a_4, a_5 都不与 a_2 相邻时, $a_5 - a_2 \geq m+1, a_5 \geq m+6$, 矛盾. (1.2) 当 $a_2a_3 \in E(H)$ 时,

$a_2a_4, a_2a_5, a_0a_3 \notin E(H)$, 所以 $a_3-a_0 \geq m+1$. 但 $a_5-a_2 \leq m$, 故 $a_4-a_2=2$, $a_5-a_2=4$, 从而 $a_3a_4, a_3a_5 \in E(H)$, 那么 a_2, a_3, a_4, a_5 构成一个 $K_{1,3}$, 矛盾. (1.3) 当 $a_2a_4 \in E(H)$ 时, $a_3-a_2=2$, $a_5-a_2=4$, 所以 $a_4=a_3+1$, $a_3a_4, a_4a_5 \in E(H)$, 故 a_2, a_3, a_4, a_5 构成一个 $K_{1,3}$, 矛盾. (1.4) 当 $a_2a_5 \in E(H)$ 时, $a_2a_3, a_2a_4 \notin E(H)$, 即 $a_3-a_2=a_4-a_3=2$, 此时必有 $a_1a_2 \notin E(H)$, 所以 $a_2-a_1=2$ 或 4, 故 $a_1a_4 \in E(H)$. 若 $a_2-a_1=4$, 则 $a_1a_3 \in E(H)$, 所以 $a_0a_1 \notin E(H)$, 即 $a_1-a_0=2$ 或 4, 但 $a_5-a_1 \geq m+1$, 故当 $a_1-a_0=4$ 时, $a_0=0$, $a_1=4$, $a_2=8, a_3=10$, $a_5=m+5$, $a_0a_3, a_1a_3, a_3a_5 \in E(H)$, 矛盾；当 $a_1-a_0=2$ 时, $a_0a_4, a_0a_2, a_0a_3 \in E(H)$, 矛盾. 若 $a_2-a_1=2$, 则 $a_1a_4 \in E(H)$, 又 $a_4-a_0>m \geq 10$, 所以 $a_1-a_0 \geq 5$, 从而 $a_0a_1, a_1a_5 \in E(H)$, 故 a_0, a_1, a_4, a_5 构成一个 $K_{1,3}$, 亦推出矛盾.

(2) 当 $a_2-a_0>m$ 时，因为 $a_2 \leq m+2$, 故 $a_2-a_0 \leq m+2$, 从而 $a_2-a_0=m+1$ 或 $m+2$. 若 $a_2-a_0=m+2$, 则 $a_0=0$, $a_2=m+2$, $a_3=m+3$, $a_4=m+4$, $a_5=m+5$, a_2, a_3, a_4, a_5 形成一个 4- 圈，矛盾. 若 $a_2-a_0=m+1$, 则由上面的讨论知 $a_2=m+1$ (否则， a_2, a_3, a_4, a_5 为连续的四个点，故它们形成一个 4- 圈，矛盾), 从而 $a_0=0$, $a_5=m+5$, $a_1 \leq 4$ (否则， $a_1>4$, 则 $a_0a_1 \in E(H)$, 且 a_1 至少与 a_2, a_3, a_4, a_5 中的两个相邻，矛盾), 所以 $a_1a_2 \in E(H)$, 且 $a_2a_3 \in E(H)$ 或 $a_2a_4 \in E(H)$. 若为前者，则 $a_4-a_2=2$, $a_3=m+2$, $a_4=m+3$, 从而 $a_2a_3, a_3a_4, a_3a_5 \in E(H)$, 矛盾. 若为后者，则 $a_3-a_2=2$, $a_3=m+3$, $a_4=m+4$, $a_5=m+5$, 那么 $a_3a_4, a_2a_4, a_4a_5 \in E(H)$, 同样推出矛盾.

综上所述, 当 $m=5q \geq 10$ 时, 我们证明了 $vla(G(D_{m,2,2})) \geq \lceil \frac{m+1}{5} \rceil + 1$. 当 $m=5q+j \geq 10$ 且 $0<j<5$ 时，由于 $D_{m,2,2} \supseteq D_{5q,2,2}$, 所以 $vla(G(D_{m,2,2})) \geq vla(G(D_{5q,2,2})) \geq \lceil \frac{5q+1}{5} \rceil + 1 = \lceil \frac{m+1}{5} \rceil + 1$. 从而当 $m \geq 10$ 时，也有 $vla(G(D_{m,2,2})) \geq \lceil \frac{m+1}{5} \rceil + 1$ 成立.

当 $8 \leq m \leq 9$ 时，下证 $vla(G(D_{m,2,2})) \geq \lceil \frac{m+1}{5} \rceil + 1 = 3$. 否则，设有 $vla(G(D_{8,2,2})) \leq 2$, 则图 $G(D_{8,2,2})$ 中有一个路 2- 染色 f. 令 H_1 为由顶点子集 $\{0, 1, \cdots, 10\}$ 导出的子图，则 f 也是 H_1 的一个路染色. 由于 $|V(H_1)|=11$, 故 H_1 中至少有六个点 $0 \leq a_0 < a_1 < \cdots < a_5 \leq 10$ 染同色 α. 那么断言 1 仍然成立，即有 $a_4-a_0>8$, $a_5-a_1>8$, 从而有 $a_0=0, a_1=1, a_4=9, a_5=10$. 那么 $a_0a_1, a_1a_4, a_4a_5 \in E(H_1)$, 故有 $a_1a_2, a_1a_3 \notin E(H_1)$, 即有 $a_2=3, a_3=5$, 从而 $a_2a_4, a_2a_5 \in E(H_1)$, 故 a_2, a_4, a_5 导出一个 3- 圈，矛盾. 所以有 $vla(G(D_{9,2,2})) \geq vla(G(D_{8,2,2})) \geq 3 = \lceil \frac{8+1}{5} \rceil + 1 = \lceil \frac{9+1}{5} \rceil + 1$, 亦即当 $8 \leq m \leq 9$ 时下界也成立.

最后来证明上界，当 $m=10q+j, 5 \leq j \leq 10$ 时，令 $f(10l+i)=f(10l+i+2)=f(10l+i+4)=f(10l+i+6)=f(10l+i+8)=i+2l$, 其中 $i=0,1$, $0 \leq l \leq \lceil \frac{m}{10} \rceil = n$, 而其余的点都周期地进行着色，即 $f(10(n+1)t+u)=f(u)$ 对任意的 $t \in Z$, $0 \leq u < 10(n+1)$ 成立，那么 f 为路着色，从而 $vla(G(D_{m,2,2})) \leq 2(\lceil \frac{m}{10} \rceil + 1)$. 当 $m=10q+j, 2 \leq j \leq 4$ 时，令 $f(10l+i)=f(10l+i+2)=f(10l+i+4)=f(10l+i+6)=f(10l+i+8)=i+2l$, 其中 $i=0,1$, $0 \leq l \leq \lceil \frac{m}{10} \rceil - 1 = n-1$, $f(10n)=f(10n+1)=f(10n+2)=2n$, 而其余的点都周期地进行着色，那么 f 为路着色，故 $vla(G(D_{m,2,2})) \leq 2\lceil \frac{m}{10} \rceil + 1$. 当 $m=10q+1$ 时，令 $f(10l+i)=f(10l+i+2)=f(10l+i+4)=f(10l+i+6)=f(10l+i+8)=i+2l$, 其中 $i=0,1$, $0 \leq l \leq \lceil \frac{m}{10} \rceil - 1 = n-1$, 而其余的点都周期地进行着色，那么 f 为路着色，故 $vla(G(D_{m,2,2})) \leq 2\lceil \frac{m}{10} \rceil$. 证毕.

推论 2.3 当 $m=10q (q \geq 1)$ 时，有 $vla(G(D_{m,2,2})) = \lceil \frac{m}{5} \rceil + 2$；当 $m=10q+1$ 时，有 $vla(G(D_{m,2,2})) = \lceil \frac{m}{5} \rceil + 1$.

在讨论 $k \ge 3$ 之前，先给出下面的引理，它是 [14] 中的两个定理.

引理 2.4

(1) 对于任意距离集 D, 有 $vla(G(D)) \le \min\{nvla(G(D^n)) : n \in N, |D^n| < \infty\}$, 其中 $D^n = \{d \in D : n|d\}$;

(2) 设 $D = \{m+1, m+2, \cdots, m+k\}$, 则当 $m = 0$ 时，有 $G(D) = \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$; 当 $m \ge 1$ 时，有 $vla(G(D)) \le \lceil \frac{m+k}{m+3} \rceil + 1$.

当 $3k-3 \le m < 4k$ 时， $G(D_{m,k,2})$ 中 k 的倍数至多有一个，故由引理 2.4 可得 $vla(G(D_{m,k,2})) \le k$. 若令 $X_0 = \{0, k, 2k\}, X_1 = \{1, k+1, 2k+1\}, \cdots, X_{k-3} = \{k-3, 2k-3, 3k-3\}, X_{k-2} = \{k-2, 2k-2\}, X_{k-1} = \{k-1, 2k-1\}$, 则顶点集 $X_0 \cup X_1 \cup \cdots \cup X_{k-1}$ 的点导出子图是一个 k- 部完全图 $K(3, 3, \cdots, 3, 2, 2)$, 因为其中任意四个点都导出一个圈或者一个 $K_{1,3}$, 从而其点线性荫度是 k, 故 $vla(G(D_{m,k,2})) \ge k$, 即 $vla(G(D_{m,k,2})) = k$. 当 $4k \le m < 5k$ 时，由引理 2.4 显然有 $k \le vla(G(D_{m,k,2})) \le 2k$. 当 $m \ge 5k$ 时有下面的结论.

定理 2.5 对于 $m \ge 5k$, 有 $\lceil \frac{m+k+2}{5} \rceil \le vla(G(D_{m,k,2})) \le \lceil \frac{m+4k+1}{5k} \rceil k$.

证 先证明上界. 当 $m = 5kl + j, 0 < j < k$ 时，对于 $0 \le t \le l, 0 \le u < k$, 令 $f(5kt+u) = f(5kt+u+k) = f(5kt+u+2k) = f(5kt+u+3k) = f(5kt+u+4k) = tk+u$, 其余的点都周期地进行着色，即对于任意的整数 n, 令 $f(5k(l+1)+n) = f(n)$, 则 f 是一个路着色，从而 $vla(G(D_{m,k,2})) \le \lceil \frac{m}{5k} \rceil k = \lceil \frac{m+4k+1}{5k} \rceil k$. 当 $m = 5kl + j$, $k \le j \le 5k$ 时，对于 $0 \le t \le l+1$, $0 \le u < k$, 令 $f(5kt+u) = f(5kt+u+k) = f(5kt+u+2k) = f(5kt+u+3k) = f(5kt+u+4k) = tk+u$, 其余的点都周期地进行着色，则 f 是一个路着色，从而有 $vla(G(D_{m,k,2})) \le (\lceil \frac{m}{5k} \rceil + 1)k = \lceil \frac{m+4k+1}{5k} \rceil k$.

下面来证明下界. 假若 $vla(G(D_{m,k,2})) \le \lceil \frac{m+k+2}{5} \rceil - 1 = \lceil \frac{m+k-3}{5} \rceil = n$, 那么 $G(D_{m,k,2})$ 有路 n- 着色,从而由顶点集 $0, 1, 2, \cdots, m+k+1$ 导出的子图 H 有路 n- 着色. 又 $|V(H)| = m+k+2$, 故 H 中至少有六个点染同色，设 $(0 \le) a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 (\le m+k+1)$ 染同色 α.

断言 1 $a_{i+2} - a_i \ge k$, $i = 0, 1, 2, 3$, 从而 $\max\{a_3 - a_0, a_5 - a_2\} \le m+1$.

否则，若有某个 i 使得 $a_{i+2} - a_i < k$, $0 \le i \le 3$, 则 $a_ia_{i+1}, a_{i+1}a_{i+2}, a_ia_{i+2} \in E(H)$, 即 a_i, a_{i+1}, a_{i+2} 形成一个 3- 圈，矛盾.

断言 2 当 $a_4 - a_0 \le m$ 时，有 $a_4 = a_3 + k = a_2 + 2k = a_1 + 3k = a_0 + 4k$.

若 $a_1 - a_0 \ne k$, 则 $a_0a_1 \in E(H)$ 或者 $a_1 - a_0 = 2k$. 若为前者，则 a_1 至多与 a_2, a_3, a_4 中的一个相邻，又此时显然 a_1 不可能与 a_2, a_3, a_4 都不相邻，所以 a_1 恰与 a_2, a_3, a_4 中的一个相邻. 若 $a_1a_2 \in E(H)$, 则 $a_0a_2, a_1a_3, a_1a_4 \notin E(H)$, 从而 $a_2 - a_0 = k$ 或 $2k$, $a_3 - a_1 = k$, $a_4 - a_1 = 2k$, 那么 $a_2a_3, a_2a_4 \in E(H)$, 故 a_1, a_2, a_3, a_4 形成一个 $K_{1,3}$, 矛盾. 若 $a_1a_3 \in E(H)$, 则 $a_2 - a_1 = k, a_4 - a_1 = 2k$, 从而 $a_0a_2, a_2a_3 \in E(H)$, 故 a_0, a_1, a_3, a_2 构成一个 4- 圈，矛盾. 若 $a_1a_4 \in E(H)$, 则 $a_1a_2, a_1a_3 \notin E(H)$, 即 $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = k$, 那么 $a_0a_4 \in E(H)$, 故 a_0, a_1, a_4 形成一个 3- 圈，矛盾. 从而只有后者，即 $a_1 - a_0 = 2k$ 成立，那么 a_2, a_3, a_4 都与 a_0 相邻，矛盾. 那么必定有 $a_1 - a_0 = k$. 同理可以证得 $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = k$, 即有 $a_4 = a_3 + k = a_2 + 2k = a_1 + 3k = a_0 + 4k$.

由断言 2 显然可得：当 u, $u+k$, $u+2k$, $u+3k$, $u+4k$ 染同色时，所有满足 $\min\{|w-u|, |w-u-4k|\} \le m$ 的点 w 都不能与这些点同色.

断言 3 $\min\{a_4 - a_0, a_5 - a_1\} > m$.

否则，设 $a_4 - a_0 \le m$, 则由断言 2 必有 $a_4 = a_3 + k = a_2 + 2k = a_1 + 3k = a_0 + 4k$, 故 $a_0a_4, a_1a_4, a_0a_3 \in E(H)$, 从而 $a_4a_5 \notin E(H)$, 即 $a_5 - a_4 = k$ 或 $2k$. 若 $a_5 - a_4 = 2k$,

则 $a_2a_5, a_1a_5, a_3a_5 \in E(H)$, 那么 a_1, a_2, a_3, a_5 形成一个 $K_{1,3}$, 矛盾. 若 $a_5 - a_4 = k$, 则 $a_0a_5 \in E(H), a_0, a_3, a_4, a_5$ 形成一个 $K_{1,3}$, 矛盾. 所以必有 $a_4 - a_0 > m$. 同理可证得 $a_5 - a_1 > m$. 即断言 3 成立.

由断言 3 可知 $\max\{a_1 - a_0, a_5 - a_4\} \le k$.

下面根据 a_2, a_0 的相对位置分情况推出矛盾.

情况 1　$a_2 - a_0 = k$.

此时 $a_0a_1, a_1a_2 \in E(H)$, 故 a_1 与 a_3, a_4, a_5 都不相邻，所以 $a_3 - a_1 = k$ 或 $2k$, 或者 $a_3 - a_1 > m$. 若 $a_3 - a_1 = k$ 或 $2k$, 则 $a_2a_3, a_0a_3 \in E(H)$, 故 a_0, a_1, a_2, a_3 形成一个 4- 圈，矛盾. 若 $a_3 - a_1 > m$, 则 $a_5 - a_3 < k$, 与断言 1 矛盾.

情况 2　$a_2 - a_0 > k$.

因为 $a_5 - a_3 \ge k$, 所以 $a_5 - a_2 \ge k + 1$, 故 $a_2 - a_0 \le m$.

(1)　若 $a_2 - a_0 \ne 2k$, 则 $a_0a_2 \in E(H)$, 那么 $a_0a_1 \notin E(H)$ 或者 $a_1a_2 \notin E(H)$. 当 $a_0a_1 \notin E(H)$ 时, 有 $a_1 - a_0 = k$(因为 $a_5 - a_1 > m$). 此时, 若 $a_1a_2 \notin E(H)$, 即有 $a_2 - a_1 = 2k$, 则由断言 3 知 $a_1a_4, a_2a_4 \in E(H)$, 从而 $a_3a_4, a_4a_5 \notin E(H)$, 即 $a_4 - a_3 = k$ 或 $2k$, $a_5 - a_4 = k$, 那么 $a_2a_5 \in E(H)$, 故 a_2, a_0, a_4, a_5 形成一个 $K_{1,3}$, 矛盾. 若 $a_1a_2 \in E(H)$, 则 a_2 与 a_3, a_4, a_5 都不相邻, 但这是不可能的 (因为 $a_5 - a_2 \le m$). 当 $a_0a_1 \in E(H)$ 但 $a_1a_2 \notin E(H)$ 时，$a_2 - a_1 = k$ 或 $2k$, 且 $a_0a_3 \notin E(H)$, 即 $a_3 - a_0 = 2k$ 或者 $a_3 - a_0 \ge m + 1$, 那么有 $a_2a_3, a_1a_3 \in E(H)$ 从而 a_0, a_1, a_3, a_2 形成一个 4- 圈，或者有 $a_2a_4, a_3a_4, a_4a_5 \in E(H)$, 都推出矛盾.

(2)　若 $a_2 - a_0 = 2k$, 则或者 $a_0a_1, a_1a_2 \in E(H)$ 或者 $a_0a_1, a_1a_2 \notin E(H)$. 若为前者，则 a_1 与 a_3, a_4, a_5 都不相邻，且由 $a_5 - a_1 \ge m + 1, a_4 - a_0 \ge m + 1, a_5 - a_3 \ge k$, 可得 $a_1 \le k$, $a_4 - a_1 \ge m + 1$, $a_3 - a_1 = 2k$, 从而 $a_2a_3, a_3a_4, a_3a_5 \in E(H)$, 矛盾. 若为后者，则 $a_2 - a_1 = a_1 - a_0 = k$. 因为 $a_5 - a_3 \ge k$, 所以 $a_3 - a_0 \le m + 1$. 若 $a_3 - a_0 = m + 1$, 则 $a_0 = 0$, $a_3 = m + 1$, $a_1a_3, a_2a_3 \in E(H)$, 从而 $a_3a_4, a_3a_5 \notin E(H)$, 必定有 $a_5 - a_3 = 2k$, 从而 $a_5 \ge m + 2k + 1$, 矛盾. 故 $a_3 - a_0 \le m$, 所以 $a_0a_3 \in E(H)$, 那么 a_1, a_2 中至少有一个与 a_3 不相邻. 若 $a_3 - a_1 = 2k$, 则 $a_3a_4, a_3a_5 \in E(H)$, 矛盾. 若 $a_3 - a_2 = 2k$, 则 $a_1a_3 \in E(H)$, 且 $a_3a_4, a_3a_5 \notin E(H)$, 从而 $a_4 - a_3 = a_5 - a_4 = k$, 那么 $a_4 - a_0 = 5k \le m$, 与断言 3 相矛盾.

综上所述，必有 $vla(G(D_{m,k,2})) \ge \lceil \frac{m+k+2}{5} \rceil$.

参　考　文　献

[1] Matsumoto M. Bounds for the vertex linear arboricity. *J. Graph Theory*, 1990, **14**: 117–126.

[2] Goddard W. Acyclic coloring of planar graphs. *Discrete Mathematics*, 1991, **91**: 91–94.

[3] Poh K. On the linear vertex-arboricity of a planar graph. *J. Graph Theory*, 1990, **14**: 73–75.

[4] Akiyama J, Era H, Gerracio S V and Watanabe M. Path chromatic numbers of graph. *J. Graph Theory*, 1989, **13**: 569–579.

[5] Eggleton R B, Erdös P and Skilton D K. Coloring prime distance graph. *Graphs and Combinatorics*, 1990, **6**: 17–32.

[6] Bollobás B, Random Graphs, Second ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol.73, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[7] Chang G J, Liu D D -F and Zhu X D. Distance graphs and T-coloring. *J. Comb. Theory, Series B*, 1999, **75**: 259–269.

[8] Chen J J, Chang G J and Huang K C. Integer distance graphs. *J. Graph Theory*, 1997, **25**: 287–294.

[9] Kemnitz A and Kolbery H. Chromatic numbers of integer distance graphs. *Discrete Mathematics*, 1998, **191**: 113–123.
[10] Kemnitz A and Marangio M. Chromatic numbers of integer distance graphs. *Discrete Mathematics*, 2001, **233**: 239–246.
[11] Kemnitz A and Marangio M. Colorings and list colorings of integer distance graphs. *Congressus Numerations*, 2001, **151**: 75–84.
[12] Liu D D -F and Zhu X D. Distance graphs with missing multiples in the distance sets. *J. Graph Theory*, 1999, **30**: 245–259.
[13] Voigt M, Walther H. Chromatic number of prime distance graphs. *Discrete Mathematics*, 1994, **51**: 197–209.
[14] Zuo L C, Wu J L and Liu J Z. The vertex linear arboricity of distance graphs. *Discrete Mathematics*, 2006, **306**: 284–289.
[15] Zuo L C, Wu J L and Liu J Z. The vertex linear arboricity of distance graphs with a special diatance set, Ars Combinatoria. 2006, **79**: 65–76.
[16] 左连翠．图的点荫度和点线性荫度．山东大学博士学位论文， 2005．3.

THE VERTEX LINEAR ARBORICITY OF THE INTEGER DISTANCE GRAPH $G(D_{m,k,2})$

Zuo Liancui

(*Center for Combinatorics, Nankai University, Tianjin* 300071)

Wu Jianliang

(*School of Mathematics and Systems Science, Shandong University, Jinan* 250100)

Liu Jiazhuang

(*School of Mathematics and Systems Science, Shandong University, Jinan* 250100)

Abstract An integer distance graph is a graph $G(D)$ with the set of all integers Z as vertex set and two vertices $u, v \in Z$ are adjacent if and only if $|u-v| \in D$, where the distance set D is a subset of positive integers. Here the vertex linear arboricity of integer distance graph $G(D)$ (denoted by $vla(G(D))$) is studied. Let $D_{m,k,2} = \{1, 2, \cdots, m\} \backslash \{k, 2k\}$ for $m \geq 3k$. In this paper, it is obtained that

$$vla(G(D_{m,1,2})) = \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil + 1,$$

$$\left\lceil \frac{m+1}{5} \right\rceil + 1 \leq vla(G(D_{m,2,2})) \leq \begin{cases} 2\left\lceil \dfrac{m}{10} \right\rceil, & \text{if } m = 10l+1, \\ 2\left\lceil \dfrac{m}{10} \right\rceil + 1, & \text{if } m = 10l+j, \quad 2 \leq j \leq 4, \\ 2\left(\left\lceil \dfrac{m}{10} \right\rceil + 1\right), & \text{else.} \end{cases}$$

The exact values of the vertex linear arboricity of $G(D_{m,2,2})$ for some special m, and the upper and lower bounds of the vertex linear aboricity of $G(D_{m,k,2})$ for $k \geq 3$ are obtained.

Key words Integer distance graph, vertex linear arboricity, path coloring.