三种新变形的全一问题 *

李学良 [1]，张晓岩 [2]

[1] 南开大学组合数学中心，天津 300071

[2] 南京师范大学数学与计算机科学学院，南京 210097

摘　要

本文研究三种新变形的全一问题及最小全一问题。原始的全一问题可被形象的称为顶点点亮顶点问题，而这三类新问题则分别被称为顶点点亮边问题，边点亮顶点问题，边点亮边问题。顶点点亮顶点问题已经得到了广泛的研究。比如，解的存在性问题和求解的有效算法已经被解决，一般图上的最小顶点点亮顶点问题已经被证明是 NP- 完备的，树、单圈图和双圈图上的最小顶点点亮顶点问题的线性时间最优算法也已被给出等。本文对于顶点点亮边问题，我们证明一个图有解当且仅当它是二部图，因此只可能有两组解和最优解。对于边点亮顶点问题，我们证明一个图有解当且仅当它包含偶数个顶点，并通过将其最优问题多项式变换成最小权的完美匹配问题，我们得出一般图上的最小边点亮顶点问题可在多项式时间内求解。边点亮边问题可归约成线图上的顶点点亮顶点问题。

关键字：全一问题；最小权的完美匹配；图算法

MR 分类 (2000): 05C85, 05C70, 90C27, 68Q25, 68R10

§1　引言

全一问题 首先是由 Sutner 提出来的，参见 [14] 。这个问题在线性细胞自动机中有着许多应用，参见 [15, 16] 及其中的引文。全一问题引述如下：假设一个 $n\times n$ 的棋盘上每一个方格内配备了一盏灯和一个按钮，如果按钮被按下，方格内的灯将从灭变到亮，或者从亮变成灭，与这个方格有边相连接的方格内的灯也将发生同样的变化。如果初始时所有的灯都是灭的，考虑如下的问题：是否可以按下一系列按钮使得最终所有的灯都变亮？这即被称作 *全一问题* 。如果可以，如何寻找按下最少的按钮使得最终所有的灯都变亮？这一最优问题被称为 *最小全一问题* 。如果将具有

*国家自然科学基金项目和江苏省博士后科研资助计划基金资助 (0602023C)

规则形状的格子图换成一般图，如何回答以上的问题？下面我们只考虑无向的简单连通图，对于不连通图，我们可逐个对各个分支来解决。所有图论中的标准用语，我们参考文献 [2] 。全一问题的一个等价形式是被 Peled [12] 提出的，所以全一问题也被称为 *点灯问题* 。全一问题的规则中若一个按钮不仅可以改变与其邻接的灯的状态还可以同时改变其上的灯的状态，那么这个规则被称作 σ^+ 规则，若一个按钮只可以改变与其邻接的灯的状态，则该规则被称为 σ 规则。

已经有很多学者开展了对全一问题的研究，参见 Sutner [16, 17], Barua 等 [1] 以及 Dodis 和 Winkler [5] 。采用线性代数的方法， Sutner [15] 证明了总存在一种方案使得在 σ^+ 规则下按下一系列按钮最终点亮所有的灯。Lossers [9] 同样采用代数的办法给出了更为简洁的证明方法。图论方法的证明由 Eriksson 等 [7] 给出。在文献 [13] 中，Sutner 证明了一般图上的最小全一问题是 NP- 完备的。我们给出了线性时间的最优算法求解树、单圈图和双圈图上的最小解 [3, 4] 。

用图论术语来描述， σ^+ 规则下的一个解可以被叙述如下：给定图 $G=(V,E)$ ，其中 V 和 E 分别代表 G 的顶点集合和边集合。 V 的一个子集合 X 是解当且仅当对于 G 的每一个顶点 v ，在 X 中与之相邻或等同的顶点的个数为奇数，这样的子集 X 也被称为 *奇覆盖* 。所以，全一问题可以被叙述为：给定图 $G=(V,E)$ ， V 中是否存在子集合 X 使得对于任一顶点 $v\in V-X$ ，在 X 中与 v 相邻的顶点的个数为奇数，然而对于任一顶点 $v\in X$ ，在 X 中与 v 相邻的顶点的个数为偶数呢？如果解是存在的，那个如何寻找基数最小的解呢？相对于下面提出的新类型的全一问题，我们也可以把这个问题形象的称为 *顶点点亮顶点问题* 。

由顶点点亮顶点问题，我们很自然地提出如下三类问题。这些问题即便不以与全一问题相联系的角度来看，从算法的角度来研究也都有着自身的意义。

顶点点亮边问题 ：假设图中每个顶点上都有一个按钮，每条边上都有一盏灯，如果我们按下顶点上的按钮，与这个顶点相关联的边上灯的亮灭状态将发生改变。如果所有的灯在初始时是灭的状态，那么是否存在一个方案使得按下一系列顶点上的按钮点亮所有边上的灯呢？用图论的术语可描述为：给定图 $G=(V,E)$ ，是否存在 V 的一个子集合 X 使得对于任一边 $e\in E$ ，恰有一个与之相关联的顶点存在于 X 中？如果存在这样一组解，如何去寻找基数最小的解？

边点亮顶点问题 ：假设图中每条边上都有一个按钮，每个顶点都有一盏灯，如果我们按下边上的按钮，与这个边相关联的顶点上灯的亮灭状态将发生改变。如果所有的灯在初始时是灭的状态，那么是否存在一个方案使得按下一系列边上的按钮点亮所有顶点上的灯呢？用图论的术语可描述为：给定图 $G=(V,E)$ ，是否存在 E

的一个子集合 X 使得对于任一顶点 $v \in V$，在 X 中与 v 相关联的边的个数为奇数？如果存在这样一组解，如何去寻找基数最小的解？

边点亮边问题：假设图中每条边上都有一个按钮且有一盏灯，如果我们按下边上的按钮，与这个边相邻的边上的灯以及此边上灯的亮灭状态将发生改变。如果所有的灯在初始时是灭的状态，那么是否存在一个方案使得按下一系列边上的按钮点亮所有边上的灯呢？用图论的术语可描述为：给定图 $G=(V,E)$，是否存在 E 的一个子集合 F 使得对于所有的边 $e \in E-F$，在 F 中与 e 相邻的边的个数为奇数，然而对于任一边 $e \in F$，在 F 中与之相邻的边的个数为偶数呢？如果存在这样一组解，如何去寻找基数最小的解？

文章分为以下三部分：第一节是引言部分。第二节中我们证明顶点点亮边问题有解当且仅当图是二部图，因此只有两组可能的解和最优解。第三节中我们证明了边点亮顶点问题有解当且仅当图的顶点个数为偶数。然后，通过多项式变换将最小边点亮顶点问题转换成最小权完美匹配问题，我们证明了一般图上最小边点亮顶点问题也可在多项式时间内求解。正如我们在第四节中所指出的边点亮边的问题可以简单地归约成线图上的顶点点亮顶点问题，因此一般图上的解总是存在的，并且解可在多项式时间内找到。

§2　顶点点亮边问题

顶点点亮边问题及其优化问题可以被完全解决，这是以上四个问题中较简单的一类问题。本节中，我们将找到顶点点亮边问题解存在的条件，并找到唯一可能的两组解。

定理 2.1 图 G 上的顶点点亮边问题有解当且仅当 G 为二部图。进而，一个连通的二部图 $G=(U,V,E)$ 有且只有两组解 U 和 V。因此最小顶点点亮边问题的解即为使得该解达到最小值 $\min\{|U|,|V|\}$ 的集合 U 或者 V。

证明. 对于定理的第一部分, 如果 G 为二部图, 设 $G=(U,V,E)$, 那么显见, U 和 V 都是 G 上的顶点点亮边问题的解. 反之, 如果 G 上具有顶点点亮边问题的解, 我们只需证明 G 中不存在奇圈即可. 否则, 假设 C 是 G 的一个奇圈, 那么在 C 中所有边上的灯将最终全被点亮。因为连接这些边的所有顶点均在 C 上，则意味着存在一种按下奇圈 C 中某些顶点上的按钮则可点亮 C 中边上所有灯的方案。然而，因为 C 的顶点个数为奇数, 这种方案是不可能存在的, 矛盾. 因此 G 中不存在奇圈, 故 G 为二部图。

对于定理中的第二部分，假设 $G=(U,V,E)$ 是一个连通的二部图，并且 $U_1\bigcup V_2$ 是 G 上顶点点亮边问题的一组解，使得 $U\supsetneqq U_1\neq\emptyset, V\supsetneqq V_2\neq\emptyset$。考虑 G 中由 U_1 及其关联的边导出的子图 (U_1,V_1) 和由 V_2 及其关联的边导出的子图 (U_2,V_2)，则无论是 U_1 和 V_2 还是 U_2 和 V_1 之间都没有边存在。否则假设 e 是 U_2 和 V_1 之间的边，那么 e 上的灯最终不可能被点亮，这是因为与 e 相关联的两个顶点均不在解中，而假设 e 是 U_1 和 V_2 之间的边，则由于与 e 相关联的两个顶点均在解中， e 上的灯最终也不可能被点亮，矛盾，故 (U_1,V_1) 与 (U_2,V_2) 并不连通，这又与 G 是连通图矛盾，因此 U_1 与 V_2 中必有一个集合为空集。如果 $U_1=\emptyset$，那么 $V_2=V$，因为 $U_1\bigcup V_2$ 是一组解。反之，如果 $V_2=\emptyset$，那么 $U_1=U$。因此 G 只具有两组解。

关于定理中最优解的结论是显而易见的。证明完毕。∎

对于不连通的二部图，我们可以寻找每一连通分支的解，再将解的集合合并起来作为整个图上的解。

§3 边点亮顶点问题

与顶点点亮边问题不同，边点亮顶点问题的解决有些难度。首先，容易看出边点亮顶点问题与奇集问题 (Odd Set Problem)[6] 有如下联系：对图 $G=(V,E)$，如果我们将边的集合看作红点集合 $R=E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$，顶点集合看作蓝点集合 $B=V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，定义边 e_i 与顶点 v_j 相邻当且仅当 v_j 是 e_i 的一个端点。因为在 G 中边与边之间有点相隔，点与点之间有边相隔，故红点集合中任意两个元素 e_i 与 e_j 互不相邻，蓝点集合中任意两元素 v_i 与 v_j 也互不相邻，由于在 G 中每条边只与两个顶点关联，故红点集合每个元素的度均为 2，所以图 G 上的边点亮顶点问题就是当二部图 $G'=(R,B,E^*)$ 中 R 的任一顶点度均为 2 的奇集问题。但把边点亮顶点问题归结为奇集问题对于问题的解决并没有任何帮助，因为一般的奇集问题是 NP- 困难的 [6]。本节中，我们将找到边点亮顶点问题有解的充要条件，即图 G 具有偶数个顶点。若 G 存在解，我们给出一个寻找解的算法。一般解及最优解的相关性质也将被讨论。当图 G 为树的情形并且具有偶数个顶点时，解是唯一的，因此也将具有唯一的最优解。最后通过多项式变换，我们将最小边点亮顶点问题转换成最小权的完美匹配问题，由此证明了一般图上的最小边点亮顶点问题可在多项式时间内求解。

定义 3.1 若图 G 中含有一个支撑子图 G' 满足 G' 的任何顶点度数都为奇数，则称 G' 为*奇度支撑子图*。

定理 3.1 图 G 上边点亮顶点问题有解当且仅当 G 含有奇度支撑子图 G' 。

证明. 充分性显然成立。下面证明必要性：若 G 上有解，则对于任意 $v \in V(G)$ ，与 v 关联的解中的边一定有奇数条，从而解中的边所组成的子集导出的子图 G' 的每个顶点都为奇度的，又因每个顶点都被点亮，故 G' 为奇度支撑子图. ∎

定理 3.2. 图 G 上边点亮顶点问题有解当且仅当 G 具有偶数个顶点, 即 G 为偶阶图。

证明. 若 G 上有解，那么由上面的结果可知， G 包含了一个奇度支撑子图 G' 。因为在任何图上奇度点的个数为偶数，则 G' 具有偶数个顶点。因为 G' 是 G 的支撑子图，所以 G 具有偶数个顶点。

反之，如果 G 有偶数个顶点，我们将证明 G 上边点亮顶点问题有解。因为 G 的支撑树上任一解也是 G 的解，因此只要证明任一偶阶树 T 上边点亮顶点问题有解即可。

采用归纳法，对 $|V(T)| = n$ 作归纳。当 $n = 2$ 时， $T = K_2$ ，结论显然成立。当 $n > 2$ 时，假设结论对一切顶点个数小于 n 的偶阶树均成立。则对于偶阶树 T 且 $|V(T)| = n$, 取 T 中的顶点 v 满足 v 最多与一个非叶子结点相邻且 v 本身不是叶子。易见，这样的顶点总是存在的。我们分成如下两种情形讨论：

情形 1. 与 v 相邻的顶点都是叶子，则 $T = K_{1,n-1}$ ，此时，取解为 $E(K_{1,n-1})$ 即可，这是因为解中有 $n-1$ 条边而 $n-1$ 为奇数，故顶点全亮。

情形 2. v 与唯一一个非叶子顶点相邻（注意 v 不是叶子）。

情形 2.1 与 v 相邻的叶子顶点为奇数个，设它们为 $l_1, l_2, \cdots, l_{2k+1}$ 。设 T' 为从 T 中去掉顶点 v 以及与 v 相邻的叶子顶点。由于有奇数个叶子与 v 相邻，故 $|V(T')| = n-(2k+1)-1 = n-2(k+2)$ 为偶数，且 T' 为树，由归纳假设知 T' 有解 E' ，从而 $E' \cup \{vl_1, vl_2, \cdots, vl_{2k+1}\}$ 为 T 的一个解。

情形 2.2 与 v 相邻的叶子顶点为偶数个，设为 $l_1, l_2, \cdots, l_{2k}$ ，则考虑树 T' 为从 T 中去掉与 v 相邻的所有叶子顶点，故 $|V(T')| = n-2k$ 为偶数，由归纳假设知 T' 有解 E' ，从而 $E' \cup \{vl_1, vl_2, \cdots, vl_{2k}\}$ 为 T 的一个解。综上所述，定理成立。 ∎

事实上, 以上定理的证明过程也给出了一个寻找偶阶图 G 的边点亮顶点问题的求解算法，时间复杂性为 $O(n^2)$ 或者 $O(|E(G)|$ 。

边点亮顶点问题的求解算法：首先，找到 G 上任一支撑树 T ，然后按照以上证明过程中使用的方法找到 T 上的一组解。这些可采用人们所熟知的 BFS 或 DFS 方法。

注释 3.1 以上的算法若在树上求解其时间复杂性显见是线性的，因为树上的每条边被遍历至多一次。

在给出求一般图上最小边点亮顶点问题的最优解算法之前，我们先研究一下关于最优解的性质。

定理 3.3 如果 G 是一个具有偶数 n 个顶点的连通图，那么最小边点亮顶点问题的任一组最优解 S_{opt} 满足 $n/2 \leq |S_{opt}| \leq n-1$ ，并且上界和下界都是可达的。

证明. 首先，取 G 的一个支撑树 T ，然后从 T 中我们可以得到 G 上边点亮顶点问题的一组解。所以，$|S_{opt}| \leq n-1$ 。因为 G 的每个顶点一定被 S_{opt} 所覆盖，即被 S_{opt} 点亮，每条边至多覆盖两个顶点，所以 $n/2 \leq |S_{opt}|$ 。当图 G 具有完美匹配 M 时，下界则是可达的，此时 M 即图 G 的最小边点亮顶点问题的一组最优解且 $|M| = n/2$ 。当图 $G = K_{1,n-1}$ 时，上界是可达的，易见 $K_{1,n-1}$ 的 $n-1$ 条边构成了边点亮顶点问题的唯一一组解。事实上，我们还可以构造很多的例子，只要当图 G 是树且满足每一个顶点的度均为奇数即可。 ∎

定理 3.4 对任一个具有偶数 n 个顶点的图 G 上的最小边点亮顶点问题，存在 $O(n^2)$ 时间的算法可生成近似度为 $2(1-1/n)$ 的近似解。

证明. 首先，找到 G 的一个支撑树 T ，然后从 T 中找到 G 上一组解 S 。这一过程的时间复杂性易见为 $O(n^2)$ 。因为解 S 满足

$$n/2 \leq |S_{opt}| \leq |S| \leq n-1$$

我们有

$$|S|/|S_{opt}| \leq (n-1)/(n/2) = 2(1-1/n)$$

即 S 为一个 $2(1-1/n)$- 近似解。 ∎

定理 3.5 由最优解中的边所导出的子图 G' 不包含圈，并且 G' 的任一连通分支在 G 中导出的子图必为树。

证明. 因为 G 中的每一个点都要被解覆盖即被点亮， G' 一定是 G 中的支撑子图，下面我们证明 G' 中不包含圈。如果 G' 中存在圈 C ，那么 C 上的边也属于最优解，另一方面，很明显 $E(G')-E(C)$ 也是 G 上边点亮顶点问题的一组解，这与 $E(G')$ 为最优解矛盾。

对于定理中的第二个命题，假定 G' 的一个连通分支 H 在 G 中的导出子图含有圈。因为 G' 无圈，故 H 也不包含圈，则必存在 G 的一条边 e 使得 $H+e$ 中存在一个圈 C 。由于 G 是简单图，因此 $|E(C)| \geq 3$ ，那么，$(E(G')-E(C))\bigcup\{e\}$ 是 G 上具有边数少于 $E(G')$ 的边点亮顶点问题的解，故与 $E(G')$ 为最优解矛盾。证明完毕。 ∎

由以上的结果，我们可以得出最小边点亮顶点问题与下面的问题是等价的：

最少边数的奇度导出支撑森林问题：给定图 G ，找到一个具有最少边数的导出的支撑森林使得其每个顶点的度为奇数。

如果一个森林的分支数为 r ，那么森林的边数则为 $n-r$ ，由此关系，我们又可得到以下的等价问题：

最大分支数的奇度导出支撑森林问题：给定图 G ，找到一个具有最大分支个数的导出的支撑森林使得其每个顶点的度为奇数。换句话说，将 G 的顶点集合划分成尽可能多的部分使得每一部分导出 G 的一个子树且该子树的任一顶点为奇度数的。

以上两个问题都是有意义的组合优化问题，我们将证明最小边点亮顶点问题具有多项式时间算法，作为推论则以上两个问题也可在多项式时间内求解。

下面的事实是明显的：由 G 上最优解导出的支撑森林的每一个分支的阶数为偶数并且分支数最大为 $n/2$ ，这个上界可以由任一具有完美匹配的图达到，所以，如果一个图 G 具有完美匹配, 那么解 S 是最优的当且仅当 S 是 G 的一个完美匹配。

有许多图类的最优解恰恰是其上的完美匹配。比如 2 边连通 3 正则图具有完美匹配， k 正则的二部图， $k>0$ ，具有完美匹配，参见 [2] 。下面，我们对一个已知的结论，参见 [10] 第 110 页，给出另一个更为简洁的证明。所谓 *无爪* 即图 G 的任一导出子图都不包含 $K_{1,3}$ ，我们把具有这种性质的图称为 *无爪图* 。

定理 3.6 无爪图 G 有完美匹配当且仅当 G 是偶阶图。

证明. 如果 G 具有一个完美匹配，那么很明显 G 具有偶数阶。反之，如果 G 为偶阶图，那么 G 上存在边点亮顶点问题的解。假设 S 是 G 上的一组最优解，那么由于 S 在 G 上的导出子图中每一个分支都在 G 上导出树的结构。因为 G 无爪，则每个这样的分支均为 K_2 。否则，某一这样的分支将具有长为 2 的路，设为 uvw 。因为 v 是导出子图的奇度顶点。一定存在一个顶点 x 不同于 u 和 w 使得 vx 为 S 的一条边。故由定理 3.5 ， $\{u,v,w,x\}$ 在 G 中一定导出一个 $K_{1,3}$ ，矛盾。 ∎

注释 3.2 注意任一图的线图均为无爪图，所以偶阶线图具有完美匹配，即线图的最小边点亮顶点问题的解恰恰是线图上的完美匹配。

最优解与完美匹配之间的这个关系提示我们有以下的 Berge 型的结论，其证明省略。

定理 3.7 图 G 上边点亮顶点问题的任两组解 S 和 S' 的对称差 $S \bigoplus S'$ 导出 G 的一个欧拉子图。

定理 3.8 令 S 是 G 上边点亮顶点问题的一组解，那么 S 是最优解当且仅当对于图 G 的任一圈 C ，都有 $|S \bigcap C| \leq |\overline{S} \bigcap C|$ ，其中 $\overline{S} = E(G) - S$ 。

作为推论，我们可以进一步得到下面的定理。

定理 3.9 假设 T 是具有偶数个顶点的树，那么 T 上边点亮顶点问题有唯一解，因此也是唯一的最优解。

证明. 如果 H 和 K 是 T 上的两组不同的解，那么 $H \bigoplus K$ 是 T 的非空欧拉子图，因此 T 中存在圈，矛盾，证明完毕。 ∎

从定理 3.9, 我们得出具有偶数个顶点的连通图 G 的每一个支撑树都具有唯一解，但是在解与支撑树之间并没有一一对应的关系，这是因为两个不同的支撑树可能具有相同的解。

以上的讨论可以帮助我们理解一般解和最优解的结构，下面我们给出本节中的重要结论。

定理 3.10 最小边点亮顶点问题能在多项式时间内求得最优解。

证明. 我们通过判定 G 的阶是否为偶数即可以很容易得出图 G 是否具有边点亮顶点问题的解。这个过程可在 $O(n)$ 时间内完成。为证明最小边点亮顶点问题可在多项式时间求得最优解，我们将任意图 G 上的最小边点亮顶点问题多项式变换成另一个带权图 G^* 的最小权完美匹配问题。由文献 [11] 知后者可在多项式时间内求得最优解，故而前者亦可在多项式时间内求得最优解。

步骤 1. 由 G 构造图 G^* 。

假设给定偶阶图 $G=(V(G),E(G))$ 且 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 。由边点亮顶点问题的求解算法，我们可以在 $O(n^2)$ 时间内求得一组解 S ，考虑 G 中由 S 导出的子图 G_0 ，我们知道 G_0 是一个 G 中的奇度支撑子图。对于 G 中任一顶点 v_i ，假设 v_i 在 G 中的邻域是 $N_i=\{u_1,u_2,\cdots,u_d\}$ ，并且 v_i 在 G_0 中的邻域是 $\{u_1,u_2,\cdots,u_{2k-1}\}$ ，其中 $k\geq 1$ 且 $2k-1\leq d$ 。我们分以下几种情形讨论。

情形 1.1 d 为奇数，设 $d=2r-1$ 。

显然 $r\geq k$ 。令 $V_i^1=\{v_i^{11},v_i^{12},\cdots,v_i^{1d}\}$ 和 $V_i^2=\{v_i^{21},v_i^{22},\cdots,v_i^{2d}\}$ 是对应于顶点 v_i 的两个新的顶点集合。将 V_i^1 中任两顶点相连形成一个具有 d 个顶点的完全图并且给每条边赋权值为 0 。对 $j=1,2,\cdots,d$ 将 v_i^{1j} 与 v_i^{2j} 用边相连，并给每一条这些边赋权值为 1 。最后，对于 $j=1,2,\cdots,d$ ， $v_i^{2j}u_j$ 可以被想象成为边 v_iu_j 。

情形 1.2 d 为偶数，设 $d=2r$ 。

显然 $r\geq k$. 令 V_i^1 和 V_i^2 与情形 1.1 中设置的相同，将三个集合 V_i^1,V_i^2 和 N_i 之间的边也与情形 1.1 设置的一样。然而对于每一个 v_i ，我们新增加了一个额外的顶点 w_i 。那么，对于 $j=1,2,\cdots,d$ ，用边连接 w_i 和 v_i^{1j} 并赋边上的权值为 0 。所以 $V_i^1\bigcup\{w_i\}$ 形成了一个具有 $d+1$ 个顶点的完全图。

令 $W=\{w_i\mid d_G(v_i)=0 \mod 2\}$ 。那么新图 G^* 以 $W\bigcup(\bigcup_{i=1}^n V_i^1)\bigcup(\bigcup_{i=1}^n V_i^2)$ 作为它的顶点集合。 G^* 的边集合由情形 1.1 和 1.2 构成。注意在情形 1.2 的条件下，边 $v_i^{2j}u_j$ 将有一点小的变化，这是因为 u_j 也被分成了两组顶点，即如果 $d_G(u_j)$ 是偶数，则增加一个顶点。一般来说，我们称顶点 v_i^{2j} ， $j=1,2,\cdots,d$ 为顶点 v_i 在 G^* 中的代表。如果 v_iv_j 是 G 中的一条边，那么 v_j 是 v_i 的邻点且 v_i 是 v_j 的邻点。假设 v_j 是 v_i 的第 p 个邻点，且 v_i 是 v_j 的第 q 个邻点，那么我们用 G^* 中的边 $v_i^{2p}v_j^{2q}$ 代替情形 1.1 和 1.2 中的边 $v_i^{2p}v_j$ 以表示 G 中的边 v_iv_j 。现在新的赋权图 G^* 已经构造完成。易见，构造的过程可在多项式时间内完成。

步骤 2. 证明 G^* 具有完美匹配。

我们将分三部分来构造一个完美匹配 M ：

部分 2.1 注意我们已经有了一个奇度支撑子图 G_0 。对于 $E(G)-E(G_0)$ 中的每一条边 v_iv_j ，我们命它在 G^* 中对应的边 $v_i^{2p}v_j^{2q}$ 属于 M 。

注意，这样一来，对于 $i=1,2,\cdots,n$ ，如果 v_i 在 G 是奇度顶点，那么 V_i^2 中有偶数个顶点被匹配，如果 v_i 在 G 是偶度顶点，那么 V_i^2 中有奇数个顶点被匹配。

部分 2.2 对于每一奇度顶点 v_i ，对 V_i^1 中与 V_i^2 中已经匹配了的偶数个顶点 v_i^{2j} 相对应的偶数个顶点 v_i^{1j} 我们用它们之间的任一完美匹配进行匹配。然后，用边 $v_i^{1j}v_i^{2j}$ 匹配 V_i^1 和 V_i^2 中未被匹配的顶点.

注意，对应于 v_i 的被膨胀开的顶点已经被完全匹配。

部分 2.3 对于每一个偶度顶点 v_i ，对 V_i^1 中与 V_i^2 中已经匹配了的奇数个顶点 v_i^{2j} 相对应的奇数个顶点 v_i^{1j} 我们用这些顶点加上一个额外的顶点 w_i 之间的任一完美匹配进行匹配。剩下的操作与部分 2.2 相同。

则以上即构造出了 G^* 的一个完美匹配。

步骤 3. 证明原图 G 上的边点亮顶点问题的每一组解，即 G 的每一个奇度支撑子图的边集合，对应于 G^* 上的一个完美匹配。

对应的 G^* 的一个完美匹配与步骤 2 中的构造相同。

步骤 4. 令 $E^*(G)$ 表示 G^* 中相应于 G 中边 v_iv_j 的边集合 $v_i^{2p}v_j^{2q}$ ，那么存在从 $E^*(G)$ 到 $E(G)$ 的一个一一对应 φ 。我们证明 G^* 中的每一个完美匹配 M 在 $\varphi|_{\overline{M}\bigcap E^*(G)}$ 的对应下,对应于 G 的一个奇度支撑子图的边集合,即 G 上边点亮顶点问题的一组解。

对于每一顶点 v_i ，我们只需要证明 M 总是匹配 V_i^1 和 V_i^2 中的奇数条边，这是因为对于 V_i^1 与 V_i^2 中的每一条匹配边恰有一个未匹配边存在于 V_i^2 与 N_i 之间，这对应于 G 的一个奇度支撑子图的边，我们分以下两种情形讨论。

情形 4.1 v_i 为 G 的奇度顶点。

因为 M 是一个完美匹配， V_i^1 中的所有顶点已被匹配，且在任一情形下 V_i^1 中被匹配的顶点数为偶数。那么 V_i^1 中剩余的未被匹配的奇数个顶点一定与 V_i^2 奇数个顶点相匹配。则我们所需要的已被证明。

情形 4.2 v_i 是 G 的偶度顶点。

因为 M 是一个完美匹配， $V_i^1\bigcup\{w_i\}$ 中的所有顶点已被匹配。注意顶点 w_i 一定

与 V_i^1 中的一个顶点相匹配。在任何情况下， V_i^1 中剩余的奇数个顶点中一定有偶数个顶点互相匹配，那么 V_i^1 与 V_i^2 中顶点相匹配的顶点个数为奇数。则我们所需要的亦被证明。

步骤 5. 注意 G^* 是一个带有完美匹配的赋权图。 V_i^1 与 V_i^2 中的每一条边被赋权值为 1，其它的边则被赋权为 0，下面证明 G^* 中的最小完美匹配 M 的权重等于 G 中最小边点亮顶点问题最优解的边数，或 G 中具有最小边数的奇度支撑子图的边的个数。

从步骤 4 的证明中，我们知道 G^* 中的一个最小完美匹配 M 对应于 G 的一个具有边数等于 M 的权重的奇度支撑子图。所以， G^* 的最小完美匹配的权重至少为 G 的具有最少边数的奇度支撑子图中边的个数。反之，从步骤 2 得知， G 中一个具有最少边数的奇度支撑子图 G_0 可以构造出一个 G^* 中的完美匹配 M 。且从构造的过程中易见， G_0 的边数即为 M 的权重。所以， G 的具有最少边数的奇度支撑子图的边数至少为 G^* 中最小完美匹配的权重。因此，最小权重与最少边数一定相等。

到此为止，我们已经证明了给定图 G 上的最小边点亮顶点问题等价于由 G 经过多项式变换构造出的新的赋权图 G^* 的最小完美匹配问题。从文献 [11] 可知最小完美匹配问题可在多项式时间内求解。因此，最小边点亮顶点问题也可以在多项式时间内求得最优解。证明完毕。 ∎

注释 3.3 以上的定理告诉我们其它三个问题也可以在多项式时间内求解。即最少边数的奇度导出支撑森林问题，最大分支数的奇度导出支撑森林问题和 R 中每个顶点度均为 2 的红 / 蓝二部图 (R, B, E) 的奇集问题 [6] 。

§4　结束语

正如我们提及的，图 G 上的边点亮边问题等价于 G 的线图 $L(G)$ 上的顶点点亮顶点问题。所以，一般图上的边点亮边问题的解的存在性问题已被解决，可在多项式时间内找到一组解。然而，对于最小边点亮边问题，如何有效的寻找这种特殊图类即线图上的最优解问题尚未解决。线图具有很多特殊的性质，比如无爪性，我们拟对该问题做进一步的研究。

致谢 作者感谢与荷兰 Twente 大学 G. Woeginger 教授的有益讨论，感谢审稿人的修改建议。

参考文献

[1] R. Barua and S. Ramakrishnan, σ-game, σ^+-game and two-dimensional additive cellular automata, Theoret. Comput. Sci., 154(1996), 349-366.

[2] J.A. Bondy and U.S.R. Murty, Graph Theory with Applications, Macmillan, London 1976.

[3] W.Y.C. Chen, X. Li, C. Wang and X. Zhang, The minimum all-ones problem for trees, SIAM J. Comput., Vol.33, No.2(2004), 379-392.

[4] W.Y.C. Chen, X. Li, C. Wang and X. Zhang, Linear time algorithms to the minimum all-ones problem for unicyclic and bicyclic graphs, Electronic Notes in Discrete Math. 17(2004), 93-98.

[5] Y. Dodis and P. Winkler, Universal configurations in light-flipping games, Proceedings of 12-th Annual ACM/SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA), Jannuary 2001, 926-927.

[6] R.G. Downey, M.R. Fellows, A. Vardy and G. Whittle, The parametrized complexity of some fundmental problems in coding theory, SIAM J. Comput., Vol.29, No.2(1999), 545-570.

[7] H. Eriksson, K. Eriksson and J. Sjöstrand, Note on the lamp lighting problem, Advances in Applied Mathematics, 27(2001), 357-366.

[8] F. Galvin, Solution to problem 88-8, Math. Intelligencer, Vol.11, No.2(1989), 31-32.

[9] O.P. Lossers, Solution to problem 10197, Amer. Math. Monthly, Vol.100, No.8(1993), 806-807.

[10] L. Lovász and M.D. Plummer, Matching Theory, Ann. Discrete Math. 29, North-Holland. Math Studies 121, Elsevier, 1986.

[11] C.H. Papadimitriou and K. Steiglitz, Combinatorial Optimizations: Algorithms and Complexity, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1982.

[12] U. Peled, Problem 10197, The American Mathematical Monthly, Vol.99, No.2(1992), 162.

[13] K. Sutner, Additive automata on graphs, Complex Systems, Vol.2, No.1(1988), 1-28.

[14] K. Sutner, Problem 88-8, Math. Intelligencer, Vol.10, No.3(1988).

[15] K. Sutner, Linear cellular automata and the Garden-of-Eden, Math. Intelligencer, Vol.11, No.2(1989), 49-53.

[16] K. Sutner, The σ-game and cellular automata, Amer. Math. Monthly, 97(1990), 24-34.

[17] K. Sutner, σ-automata and Chebyshev-polynomials, Theoret. Comput. Sci., 230(2000), 49-73.

Three New Versions of the All-Ones Problem

Xueliang Li[1] and Xiaoyan Zhang[2]

[1]Center for Combinatorics and LPMC, Nankai University, Tianjin 300071

[2]School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097

Abstract

We study three new versions of the all-ones problem and the minimum all-ones problem. The original all-ones problem is simply called the vertex-vertex problem, and the three new versions are called the vertex-edge problem, the edge-vertex problem and the edge-edge problem, respectively. The vertex-vertex problem has been studied extensively. For example, the existence of solutions and efficient algorithms for finding solutions were obtained, and the minimum vertex-vertex problem for general graphs was shown to be NP-complete, however for trees, unicyclic and bicyclic graphs it can be solved in linear time, etc. In this paper, for the vertex-edge problem, we show that a graph has a solution if and only if it is bipartite, and therefore it has only two possible solutions and optimal solutions. For the edge-vertex problem, we show that a graph has a solution if and only if it contains even number of vertices. By showing that the minimum edge-vertex problem can be polynomially transformed into the minimum weight perfect matching problem, we obtain that the minimum edge-vertex problem can be solved in polynomial time in general. The edge-edge problem is reduced to the vertex-vertex problem for the line graph of a graph.

Keywords: all-ones problem; minimum weight perfect matching; graph algorithm

MR Subject Classification(2000): 05C85, 05C70, 90C27, 68Q25, 68R10